π と e の連分数展開とその数値計算法

野崎　昭弘*

要　　約

円周率 π を表すいわゆるブランカーの公式の初等的な導き方を示し，その打切り誤差が，$\pi/4$ の逆数をグレゴリー級数で表したときの打切り誤差と正確に一致することを示した。また その導き方を応用して，自然対数の底 e の収束の速い連分数展開を与えた。さいごにそれらの無限連分数の数値計算法を検討して，これまでに知られている直接的な計算法をブランカーの公式に当てはめるとすぐ桁あふれが起こってしまう（最初の10項しか計算できない）こと，また本論文で提案される計算法によれば，桁あふれを大幅に抑えられる（４百万項計算できる）ことを示した。

1．π の連分数展開

π を表す次の公式が知られている（W. Brounker）：

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cdots\cdots}}}\quad\cdots(1)$$

逆数を取ってから両辺を4倍した“$\pi=\cdots$”という形で書かれることもあるが、もとはこの形である。これがどのように証明できるのか、私は以前からふしぎに思っていたが、P.ベックマンがその著書の中で「ブランカーがどうやってこの結果を得たのかは、誰も推測できない」と書きながら、オイラーの証明を紹介しているのを知った。[1]それを見ていたら、いかにも昔の人がやりそうな、直接的な証明法を思いついた。ブランカーの証明とはどうも異なるようであるが、初等的であるし打切り誤差がよくわかるので、概要を記してみたい。

出発点はオイラーと同じ、グレゴリーの級数である：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots\quad\cdots(2)$$

＜補足＞級数（２）を［１］に従って「グレゴリーの級数」(1671) と呼ぶが、「発表したのはライプニッツ」(1674) なので「ライプニッツの級数」とも呼ばれる。しかし実は「インドの数学者マーダヴァが14世紀にすでに発見していた」ので、呼び方に深い意味はないとお考え頂きたい。

（２）の両辺の逆数は、次のように表せる：

$$\frac{4}{\pi}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots}\quad\cdots(3)$$

*大妻女子大学社会情報学部

$$= 1 + \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots\cdots}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\cdots}$$

これが基本変形の第１段であるが、右辺の分数は，さらに次のように変形できる。

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots} - 1} = \frac{1}{\frac{3}{1-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots\right)} - 1}$$

$$= \frac{1}{3 + \frac{3^2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)}{1-3\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)} - 1} = \frac{1}{2 + \frac{3^2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)}{1-3\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)}}$$

あとは同じ計算を続ければ，自然に（１）の形が導かれるのであるが，次のような記号を導入しておくと計算がラクである。

$$x_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} - \cdots\cdots$$

すると明らかに

$$x_0 = \frac{\pi}{4},$$

$$x_n = \frac{1}{2n+1} - x_{n+1} = \frac{1-(2n+1)x_{n+1}}{2n+1}$$

で，次の等式が成り立つ。

$$\frac{(2n-1)^2 x_n}{1-(2n-1)x_n} = \frac{(2n-1)^2}{\frac{1}{x_n} - (2n-1)}$$

$$= \frac{(2n-1)^2}{\frac{2n+1}{1-(2n+1)x_{n+1}} - (2n-1)}$$

$$= \frac{(2n-1)^2}{(2n+1) + \frac{(2n+1)^2 x_{n+1}}{1-(2n+1)x_{n+1}} - (2n-1)}$$

$$= \frac{(2n-1)^2}{2 + \frac{(2n+1)^2 x_{n+1}}{1-(2n+1)x_{n+1}}}$$

これを式（３），すなわち

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{x_1}{1-x_1}$$

に繰り返し適用すれば，公式（１）が導かれる（厳密には数学的帰納法で証明できる)。

収束の問題は，ブランカーがどう考えたのかはわからないが，次のように確かめられる：途中の $(2n-1)^2/2$ までを計算して，そのあとの x_{n+1} を含む項を無視した値は，$x_{n+1}=0$ とみなすこと，いいかえれば「最初の分母のグレゴリー級数を，第 n 項 $\pm 1/(2n+1)$ までで打ち切った値」に一致する____ブランカーの公式を第 n 項まで計算した値を D_n とすると，

$$D_0 = 1$$

でしかも

$$D_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}} \quad \cdots (4)$$

ということである。したがって，打切り誤差は「$\pi/4$ の逆数 $4/\pi$ をグレゴリー級数で求めたときの打切り誤差」，より正確に言えば「分母のグレゴリー級数の打ち切りによって生じた，全体の誤差」と正確に一致するので，収束の問題はグレゴリー級数の収束に帰着される。収束の速さも，もとの級数に一致する（だから遅い！)。

＜注意＞グレゴリー級数の打切り誤差を δ とすると，相対誤差は $\delta/(\pi/4) = 4\delta/\pi$ である。一方ブランカーの公式の打切り誤差は，その逆数なので

$$\frac{1}{\left(\frac{\pi}{4}\right) + \delta} - \frac{1}{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-\delta}{\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right)\frac{\pi}{4}}$$

となる。したがって相対誤差は

$$\frac{-\delta}{\frac{\pi}{4} + \delta} = \frac{-4\delta}{\pi + 4\delta}$$

であって，もとのグレゴリー級数の相対誤差と絶対値はほぼ一致し，符号は反対になる。

２．e の連分数展開

前節の展開法は，任意の級数に適用できる。各項が有理数の交項級数には特に適用しやすいので，次の級数に応用してみよう：

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots \quad \cdots (5)$$

上に倣って

$$y_n=\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}+\frac{1}{(n+4)!}-\cdots\cdots$$

とおくと，明らかに

$$y_n=\frac{1}{(n+2)!}-y_{n+1}=\frac{1-(n+2)!y_{n+1}}{(n+2)!}$$

で，

$$e=\frac{1}{y_0}=\frac{1}{\frac{1}{2}-y_1}=\frac{2\left(\frac{1}{2}-y_1+y_1\right)}{\frac{1}{2}-y_1}\quad\cdots(6)$$

$$=2+\frac{2y_1}{\frac{1}{2}-y_1}=2+\frac{4y_1}{1-2y_1}$$

が成り立つ。また

$$\frac{(n+1)(n+1)!y_n}{1-(n+1)!y_n}=\frac{(n+1)}{\frac{1}{(n+1)!y_n}-1}$$

$$=\frac{(n+1)}{\frac{(n+2)!}{(n+1)!(1-(n+2)!y_{n+1}}-1}$$

$$=\frac{(n+1)}{\frac{(n+2)}{1-(n+2)!y_{n+1}}-1}$$

$$=\frac{(n+1)}{(n+2)+\frac{(n+2)(n+2)!y_{n+1}}{1-(n+2)!y_{n+1}}-1}$$

$$=\frac{(n+1)}{(n+1)+\frac{(n+2)(n+2)!y_{n+1}}{1-(n+2)!y_{n+1}}}$$

であるから，これを（6）の最後の式に繰り返し適用すると，次の連分数展開が導かれる：

$$e=2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cdots\cdots}}}\quad\cdots(7)$$

ほかにも公式はたくさんあるが，これは手軽に得られるのが取り柄であろう。

<参考>オイラーの諸公式の中では，次の形が最も近い。[2)]

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\cdots\cdots}}}}}\quad\cdots(8)$$

これは（7）から初等的な式変形で導かれ，収束の速さはまったく同じであるが，分母・分子がより小さい点で，（7）よりすぐれている。

3．連分数の数値計算

無限連分数

$$D=A_0+\cfrac{A_1}{B_1+\cfrac{A_2}{B_2+\cfrac{A_3}{B_3\cdots\cdots}}}$$

の計算については，次の方法が知られている（たとえば分子がすべて1の場合については［3］151ページの問題2の解で示されているほか，［4］135ページにも同等な方法の解説がある）。

A_n/B_n までで打ち切ってひとつの分数にまとめた結果を $D_n=x_n/y_n$ とすると，

$$x_0=A_0,y_0=1$$
$$x_1=A_0B_1+A_1,y_1=B_1$$

また $n>1$ に対して

$$x_n=B_nx_{n-1}+A_nx_{n-2},$$
$$y_n=B_ny_{n-1}+A_ny_{n-2}$$

しかしこれをブランカーの公式（逆数を4倍して直接 π を求める形にしたもの）に適用して，コンピュータに計算させてみると，たちまち桁あふれを起こしてしまい，実用的でない。実際手近のパソコンで，VBの倍精度整数で計算してみたが，$n=11$で桁あふれを起こしてしまい，$x_{10}/y_{10}=3.0418\cdots$までしか計算できなかった。また倍精度の実数で計算しても，$n=150$，$x_{150}/y_{150}=3.1349\cdots$が「桁あふれ」を起こさずに計算できる限界であった。

一方 $n>0$ に対して

$$u_n=x_n/x_{n-1},v_n=y_n/y_{n-1}$$

とおくと，

$$u_1=B_1+\frac{A_1}{A_0},$$
$$v_1=B_1,$$
$$D_1=A_0+\frac{A_1}{B_1}$$

で，$n>1$ に対して次の漸化式が成り立つ：

$$u_n = B_n + A_n/u_{n-1}$$
$$v_n = B_n + A_n/v_{n-1}$$
$$D_n = (u_n/v_n)D_{n-1}$$

これは桁あふれが起こりにくい上に「1階差分」なので，計算も（プログラミングも）容易である。実際，これなら

$$D_{4,000,000} = 3.1415924\cdots$$

も計算できた。また公式（7）にあとの方法を適用して，次の結果が得られた（(1) より収束がけた違いに速い！）。

$$D_{14} = 2.7182818284590 25995,$$
$$D_{15} = 2.718281828459046867,$$
$$D_{16} = 2.718281828459045979$$

計算は言語Cの倍精度実数で行なったが，これが精度の限界であった。なお正しい値は：

$$e = 2.718281828459045235\cdots$$

＜補足＞ブランカーの公式の計算は，一般的な方法でなくてよければ，グレゴリー級数との関係(4)を使うのが最も速い。実際，

$$d_0 = x_0 = y_0 = 1$$

とおくと，$n>0$ に対して，次の等式が成り立つ：

$$d_n = d_{n-1} + (-1)^n \frac{1}{2n+1},$$
$$D_n = \frac{1}{d_n},$$
$$x_n = (2n+1)x_{n-1},$$
$$y_n = (2n+1)y_{n-1} + (-1)^n x_{n-1}$$

上の漸化式を使うと，$D_0=1$ から始めて，

$D_1 = 1.5$,

$D_2 = 1.153846153\cdots$

$D_3 = 1.381578949\cdots$

••••

以下が「桁あふれ」なしに，すらすらと計算できる。ただし極限値 $4/\pi = 1.2732\cdots$ への収束は，きわめて遅い（グレゴリー級数の弱点！）。

参考文献

［1］P.ベックマン（原著1971）『π の歴史』田尾陽一・清水韶光訳，ちくま学芸文庫，219ページ

［2］E.マオール（原著1994）『不思議な e の物語』伊理由美訳，岩波書店，202ページ

［3］高木貞治（1931）『初等整数論講義』共立出版，151ページ

［4］D.M.ブレッソード（原著1989）『素因数分解と素数判定』玉井浩訳，エスアイビー・アクセス，135ページ

Expansions of π and e into Continued Fractions and their Numerical Evaluation

Akihiro Nozaki
School of Social Information Studies, Otsuma Women's University

Abstract

In this paper, we have shown an elementary method to derive Brounker's Formula, an expansion of the number π into continued fraction, and proved that its truncation error is identical with that of the evaluation of the reciprocal of $\pi/4$ by Gregory's series. By the same method, we obtained an infinite continued fraction which converges very rapidly to the value of e, the base of natural logarithm. We finally examined numerical evaluation of infinite continued fractions, and have shown that Brounker's Formula is practically intractable by the ordinary straight–forward method, because overflow occurs in the very early stage of computation, while its evaluation can be continued much further without overflow by the method presented in this paper.

Key Words（キーワード）

Brounker's formula（ブランカーの公式），expansion into continued fraction（連分数展開），the number π（円周率 π），the number e, the base of natural logarithm（自然対数の底 e），numerical evaluation（数値計算），overflow（桁あふれ）