

A Fourier Transform for Unequal Interval Sampling Data

| | |
|-------|---|
| メタデータ | 言語: jpn 出版者: 公開日: 2012-01-01 キーワード (Ja): キーワード (En): Fourier transform, Unequal Interval, trapezoidal integral, Vostok ice core, 1540 year period 作成者: 白川, 利昭 メールアドレス: 所属: |
| URL | https://otsuma.repo.nii.ac.jp/records/5759 |

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.



不等間隔データのフーリエ変換

白川 利昭

要 約

科学データを標本化するとき、等間隔に標本化することができない場合が多い。スペクトルを計算するとき、フーリエ変換を使うが、不等間隔で標本化されると、高速フーリエ変換のアルゴリズムが使えない。そのため、データを補間したり、特殊な技法が使ったりされてきた。最近のコンピュータの進歩は、いままで、使えなかった、基本的な方法を蘇らせている。この論文では、基本に立ち返って、不等間隔のデータのフーリエ変換を試み、評価してみた。その結果台形近似による積分で十分な精度が得られることがわかった。Vostokの氷床の酸素同位体の時代変化をフーリエ変換したところ、1540年周期のスペクトルが明瞭に検出された。

はじめに

フーリエ変換は、事象の周期性を抽出する手段のなかで、非常に有用な手段のひとつである。しかし、データの数が多くなると、計算量が多くなり ($O(N^2)$)、計算時間が非常にかかる。これを解決するために、高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform: FFT) が、CooleyとTukeyによって考え出された。これは、データの数を、2のN乗個にすることによって、計算量が、 $O(N \log N)$ になることを示したものである。これによって、フーリエ変換は、実用になったといってもよい。(日野 (1977) (河田 (2002))

しかし、科学技術の場面で遭遇する実際のデータは、2のN乗になることは、ほとんどない。しかも、FFTは、データが、等間隔に分布して

いることを仮定している。そのため、原データに新たにデータを詰め込んだり、データを補間して、FFTの条件に合わせるがおこなわれた。

(山本 (2003))

最近のCPU演算の高速化によれば、FFTのデータ個数が、100万個を処理するのに、数秒しかかからなくなった。同様に、離散Fourier変換 (DFT) で、数千個のデータを処理する、数10秒しかかからない。そのため、DFTであっても数千個のデータなら十分実用になる時間の範囲で結果を求めることが出来るようになった。このことから、データが数千のオーダーで等間隔であれば、DFTを用いて、データの個数が2のN乗の条件を、考慮しなくて実用上計算できることになった。データが等間隔に分布しているときは、シンプソン法などで数値積分をしてやれば、精度

も向上する。

だが、等間隔にデータが分布していない場合には、この方法では計算できない。そのため、ヒストグラムに近似して、積分をおこなってきた。そのため十分な精度が得られない場合があった。

データが x 軸において不等間隔の場合は、これらの方法をそのまま使えないので工夫が必要である。

本研究では、不等間隔データを処理するフーリエ変換のプログラムを作成して、その性能の評価と、応用の一つとして Vostok ice core の ^{18}O の経年変化を解析したので、報告する。

方法

不等間隔データをフーリエ変換するためにフーリエ変換の原理に立ち返ってみる。フーリエ変換は、三角関数とデータの積を積分することによって係数を求める。そこで、簡単な積分近似を3種試みた。

次の3つの方法を試行するために、各々フーリエ変換プログラムを作製した。

- 1) histogram 近似による積分
- 2) 台形近似による積分
- 3) 2次式近似による積分

各々のプログラムのアルゴリズムは以下のとおりである。

1) histogram による積分

Y データの差と X 間隔をかけ合わせて、求積する方法である。この方法は、間隔が小さく、 Y の変化がなめらかであるときは、十分精度が出る。しかし、 Y データの変化が大きく、間隔が大きい場合には、誤差が大きい。計算量は、最小である。

2) 台形近似

隣り合う Y データと X 間隔から、台形を作り求積する。1) の方法より精度が良い。特に正負に変化の激しいデータには、有効である。

3) 2次式近似による積分

X 軸が等間隔の場合には、Simpson 法として

よく知られている。不等間隔の場合には、係数を連立方程式により解かなければならないために、計算量が増える。しかし積分精度は、台形法よりよくなると言われている。本論文では連立方程式を解くために、Gauss-Jordan 法を使用した。

上記の3方法のフーリエ変換は、以下の(1)、(2)、(3)式を使用した。

j 番目の周波数を

ヒストグラム 式

$$ft[j] = ft[j] + y[i] * \sin(wt) * (x[i+1] - x[i])$$

台形

$$ft[j] = ft[j] + (y[i+1] * \sin(wt) + y[i] * \sin(wt)) * (x[i+1] - x[i-1]) / 2.0$$

2次式

なお係数 a , b , c を Gauss-Jordan 法で求めた。

$$ft[j] = a * (x[i+1]^3 - x[i]^3) / 3 + b * (x[i+1]^2 - x[i]^2) / 2 + c * (x[i+1] - x[i])$$

これら3つの方法をテストするために擬似データを作成した。擬似データは、乱数を用いて x 軸の間隔を不等間隔にするプログラムにて、作ったデータファイルである。乱数は、C言語で使われる $\text{rnd}()$ 関数の周期では短いので、 $\text{random}()$ 関数を使った。データは、個数が1000個で周期が可変個数の三角関数の和である。PCは、CPUがAMD Phenom II X6 1090Tのものを用いた。

結果と考察

図1, 2, 3に示したのは、5つの三角関数の和を x 軸を不等間隔にした擬似データのフーリエ変換スペクトルである。横軸は、周期であり、いずれも5つの周期にピークが見られる。しかし、2次近似の場合、わずかに、低周期部分に、ノイズが見られる。台形近似が最もノイズが少なくスペクトルが良好であった。3つの方法ともピークの位置は、おなじであった。このことから擬似データによる検査では、おおきな差は認められなかった。

フーリエ変換に費やされて時間は、1000個の

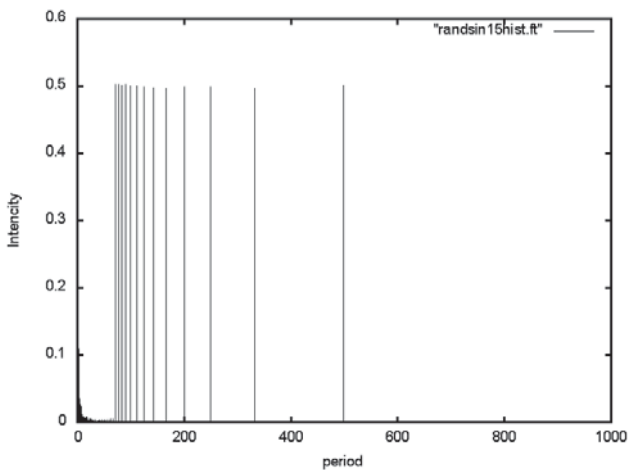


図1 histogram 近似による擬似データのスペクトル

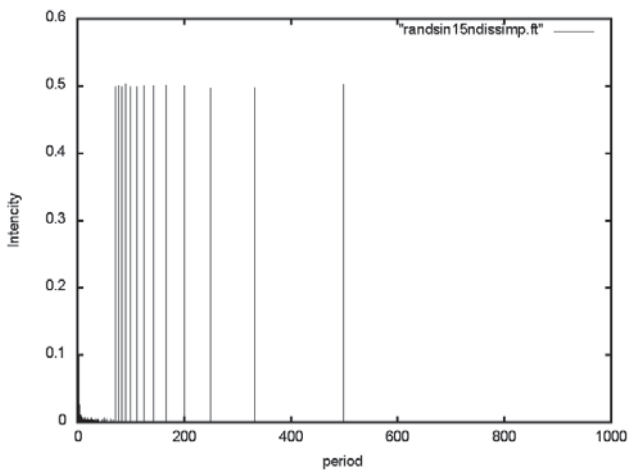


図2 台形近似による擬似データのスペクトル

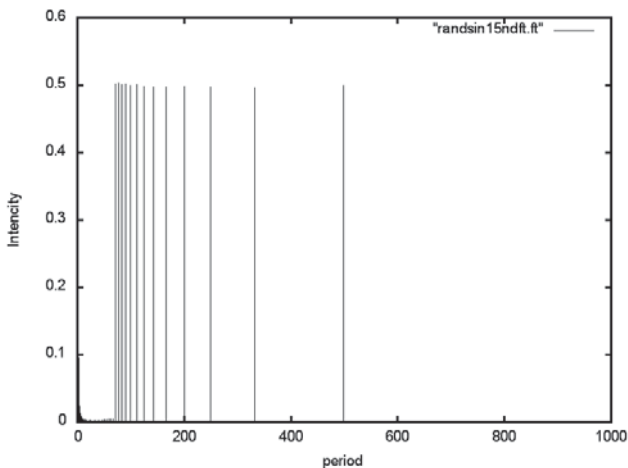


図3 2次式近似による擬似データのスペクトル

データで、1), 2), 3) 各々 0.053秒、0.058秒、0.145秒であった。2次近似は、他の方法に比べて、2.5倍の時間が費やされているが、すべ

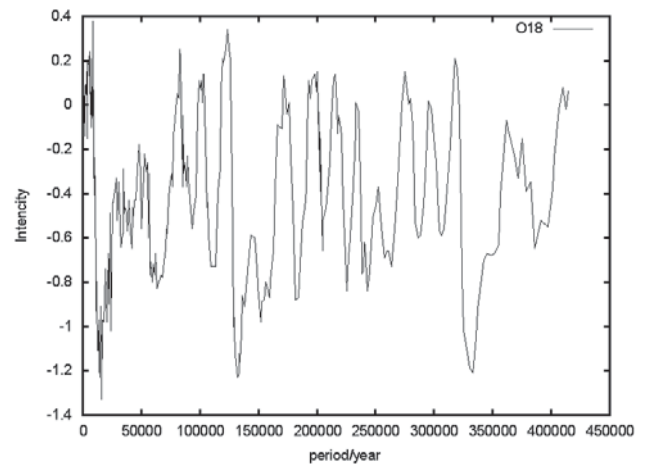


図4 Vostok ice core の酸素同位体濃度の時代変化 (petit *et. al.* (1999))

て0.2秒以内に計算が終わっており、十分実用になることが確かめられた。

次に、実際に存在するデータをフーリエ変換してみた。使用したデータは、南極 Vostok 基地の氷床のボーリングデータである。(NOAA) (Petit (1999))

このデータは、3000m までの氷床のコアをボーリングによって採取して、その中に含まれる CO_2 、 ^{18}O 、 NO_x 、ダストなどを調べたものである。コアの氷床の表面からの距離は、年代を表している。これらのデータのうち、酸素の安定同位体比は、その年代の温度を反映するので、興味あるデータである。すでにいろいろな方法によって分析されているが、不連続フーリエ変換による解析は、行われていない。このデータで興味深いのは、酸素の安定同位体比の時代による変化である。酸素の安定同位体比は、その時代の温度の変化を示しているからである。気候は、周期変化をすることが、他のデータでも知られており、Vostok の氷床コアでも温度の時代変化から、みてとれる。(図4)

このデータは、氷床のコアの縞模様から、年代を出しているが、当然ながら、年毎に降雪量が違うので、長さで等間隔にサンプリングすると、年代は、等間隔にならない。その様子が図4に見て取れる。このデータから、気候の周期性を調べるためには、フーリエ変換が使われる。ここで使用

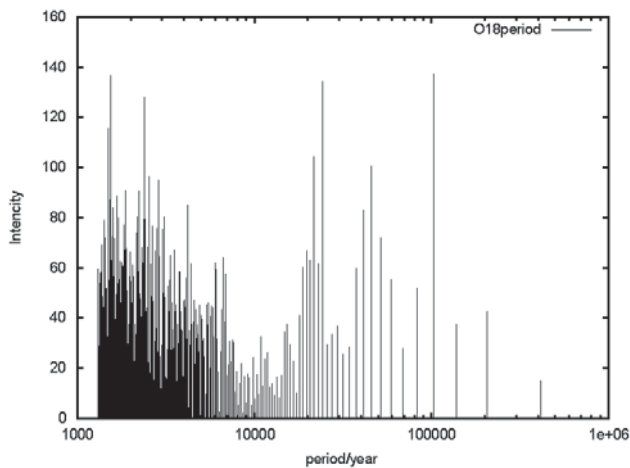


図5 histogram近似によるVostok ice coreの酸素同位体濃度のスペクトル

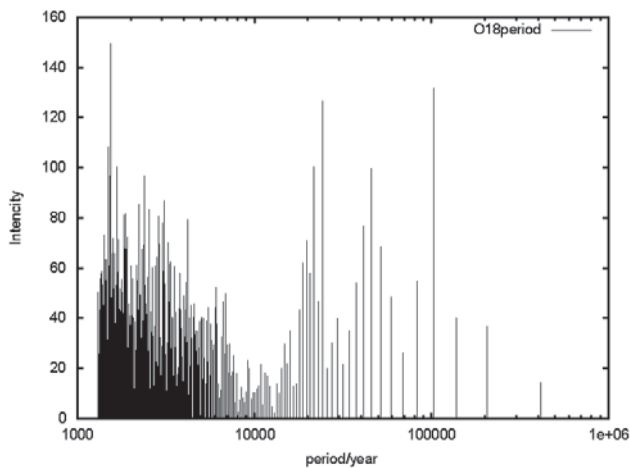


図6 台形近似によるVostok ice coreの酸素同位体濃度のスペクトル

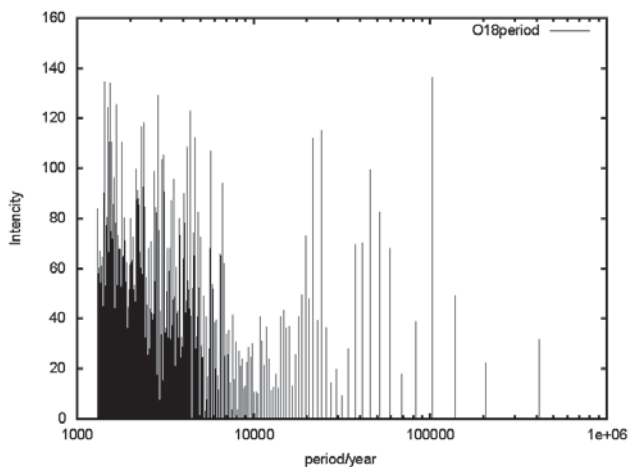


図7 2次式近似によるVostok ice coreの酸素同位体濃度のスペクトル

されるフーリエ変換は、時間軸が不等間隔であることを要求される。そのために、前記の方法の所で述べた、1), 2), 3) の3つ方法で分析をおこなった。

図5, 6, 7は、Vostok ice coreの不等間隔フーリエ変換を3つの方法で行った結果である。明らかに3つの方法による違いがでている。まず、短い周期では、1), 2), 3)の方法全てで1540年のスペクトルピークが見られる。長い周期では、103000年が顕著である。しかし3)の方法では、短い周期のピークが数本重なりあまりはっきりとピークが認められずノイズかシグナル判別が難しい。これは、2次式の接続の不連続性が、影響しているのではないか。全ての面で良好だったのが、2)の台形近似である。ピーク先の鋭さや分離が良い。

さてこれら3つの方法で検出された、気候周期の短周期である1540年は、いろいろな方法で見出されている。ひとつは、今回の解析と同じく、氷床の雪氷コアである。氷床コアは、いくつか取得されている。また、歴史上の出来事により1500年周期が見出されている。

現代から1000年ほど前、平安時代は、温暖な気候であることが知られている。また、疫病が流行っていることが指摘されている。(石井(2002)) その頃、地球のかなりの部分が乾燥化が進み、草原や、森林が失われて砂漠化されたことが知られている。そして、遊牧民は、食料を求めて広大な帝国を作ったことがフェイガンによってえがかれている。(フェイガン(2008))

それから750年たった中世には、寒冷気候のため、作物が取れなく飢饉や餓死がおこった。またロンドンのテムズ川が氷結したことが知られている。日本では、天明の飢饉(1782-1788)が有名である。この原因は、いろいろな説があるが、例えば火山の噴火などの影響だと言われているが、主たる原因は、1500年周期の低温度の極にあったためであろう。その時代から、温暖化が始まり、現在なお温度が上昇している。

さて、1500年周期を考えると、現在は、気温の上昇期にある。天明から数えると、これからあと

500年近くは、気温の上昇期になる。前回の高温期をみると、乾燥と高温で、作物がとれなくなり飢えと疫病が蔓延して大政変が起こった。また、マラリアが蔓延したことが言われている。

天明から遡る1500年前、紀元3世紀ごろ寒冷な気候で中国では、不作による飢饉が後漢が減びる一因になっている。

結論

不等間隔データの周期性を求めるために、フーリエ変換の原理に立ち返って、3つの方法を試行してみた。不等間隔データのために高速フーリエ変換(FFT)ができないデータでも、フーリエ積分を行うことによって、十分実用になるになることがわかった。データ数が、1000以下の場合、最近のPCでは、1秒以内にフーリエ変換ができることが判明した。3つの方法では、台形近似が、バランスの良い結果を示した。

この方法は、年輪年代決定法や、堆積物の成分

分析などにも応用できると考えられる。

参考文献

- 山本浩子、野口健太郎、田所嘉昭、(2003)、“マルチレート離散フーリエ変換の特性改善”、電気学会論文誌C, vol.123-C, no.12, pp.2066-2072, Dec..
- 河田 聡、(2002)、『科学計測のためのデータ処理入門』、CQ出版、ページ 39.
- 日野幹雄、(1977)『スペクトル解析』、朝倉書店
- J. R. Petit, etc, (1999), ‘Climate and atmospheric history of the past 420,000 years from the Vostok ice core, Antarctica’, *Nature* 399, 429-436.
- ブライアン フェイガン (2008)、『千年前の人類を襲った大温暖化』河出書房新社.
- 石井和子、(2002)、『平安の気象予報士 紫式部』、講談社、ページ 21.

A Fourier Transform for Unequal Interval Sampling Data

TOSHIAKI SHIRAKAWA

Information Design, School of Social Information, Otsuma Women's University.

Abstract

When sampling scientific data often can not be sampled at regular intervals. When calculating the spectrum, but using the Fourier transform is sampled at unequal intervals, a fast Fourier transform algorithm can not be used. Therefore, you can interpolate the data, and I have been using a special technique. Recent advances in computers, revived until now, were not available including, the basic technique. Back to the basics, try the Fourier transform of unequally spaced data, in this paper, I tried to evaluation. I have found that sufficient accuracy can be obtained by integration of the trapezoidal approximation result. As a result of the changing times of the Fourier transform of the oxygen isotope ice Vostok, the spectrum of the 1540 period was clearly detected.

Key Words (キーワード)

Fourier transform (フーリエ変換), Unequal Interval (不等間隔), trapezoidal integral (台形積分), Vostok ice core (ボストーク 氷床 コア), 1540 year period (1540年周期)